Weil wir bestenfalls ernten, was wir gesät haben: Auf dem Weg zu einer anderen Unterrichtskultur !

Hartmut KÖHLER, LEU Stuttgart

(E) Die Saat ging auf

In flurbereinigter Gegend, in der auch noch die letzten Feldraine und Brachen hergerichtet wurden, kann nichts mehr wachsen, was nicht eigens gesät wurde. Die totalitäre Indienstnahme der Welt hat diesen Sachverhalt aber inzwischen in allen Bereichen erzeugt. So wachsen auch die Kinder in einer veranstalteten Welt ohne wirkliche Spielräume heran, und die in Beziehung auf die Schule geäußerte Behauptung des Titels, dass wir nicht ernteten, was wir nicht gesät hätten, kann weitergehende Gültigkeit beanspruchen, als man zunächst zuzugestehen bereit ist.
Bleibt die zweite Aussage zu betrachten, die durch das „bestenfalls“ gemacht wird, *dass* wir möglicherweise ernten, was wir gesät haben. Da hat die TIMS-Studie gezeigt, was kritische Beobachter längst wussten, dass nämlich unser Mathematikunterricht hoch effektiv ist. Er erreicht weitgehend, was er explizit und implizit (!) anstrebt, nämlich die Imitation der über didaktische Modelle konsumierbar gemachten Routinen. Er wird nur deswegen als wenig erfolgreich angesehen, weil man von ihm etwas erwartet, das er gemeinhin – außer in Sonntagsreden und Lehrplanpräambeln – eben nicht anstrebt. Wir können aber nicht Bildung ernten, wenn wir Kalkülabarbeitung säen.

Das nach TIMSS offenbare Problem des Mathematikunterrichts ist nicht eines irgendwelcher didaktischer Einzelfragen – etwa der Form von Aufgaben oder der Unterrichtsmethoden – sondern das seiner grundsätzlichen und in der normalen Praxis realisierten Orientierung. Wir fragen daher nach einem möglichen Beitrag des Mathematikunterrichts zur Bildung des Schülers.

* * *

Wer zur Quelle kommen will, muss gegen den Strom schwimmen. Der Strom ist hier der Zeitgeist einer uniformierenden Didaktisierung (übrigens aller Lebensbereiche) unter der Fragestellung „wie tue ich X richtig“. Unser idealer Schüler wäre hingegen der des folgenden Bildes.

> Von dem Landschaftlichen abgesehen, war auch das Erkunden der neuen Sportart an sich sehr vergnüglich. Es erinnerte mich an meine ersten Schritte auf

> Steigeisen: keine Kurse, kein blödes Herangeführtwerden: einfach reinsteigen und los. Und dann einfühlen: es kommt niemals darauf an, bestimmte Bewegungskomplexe technisch korrekt aneinander zu setzen, sondern darauf, herauszufinden, was für ein *Gefühl* das ist, tourenskizugehen. Indem einem jemand sagt, wie man einen Fuß vor den anderen zu setzen hat, kann man es zwar auch lernen, aber sobald man dann zum Beispiel bei ungewohnten (nicht eingeübten) Schneebedingungen unterwegs ist, wird man wieder ins Schleudern kommen. Wenn man die Tourenskier einmal *verstanden* hat, ihrem Charakter nach, wird man sich stets recht schnell zuhause fühlen. Und man vergibt sich Entscheidendes, wenn man dem Äußerlichen nach lernt: das ist nämlich ein Optimieren nach Funktionswerten. Ich nehme das Neue lieber als Gelegenheit, die erste Ableitung zu optimieren: das Lernen des Lernens zu üben. (L.K. 25 J.)

Der Strom enthält beispielweise die Einführung in das schriftliche Rechnen als Manipulation von Ziffern in einem festgelegten Schema. Der durchaus effektive Unterricht erreicht, dass in der kontextkonformen Prüfung geeignete Aufgaben durch diese Ziffernmanipulation gelöst werden. Wenn aber später ein Student (in einer selbst gestellten Aufgabe!)

$$\begin{array}{ccccc} & 4 & 7 & 7 & 4 \\ - & 7 & 4 & 4 & 7 \\ {}_1 & & & {}_1 & \\ \hline & 7 & 3 & 2 & 7 \end{array}$$

rechnet, und wenn das keineswegs ein Einzelfall ist [Gerster], dann ist das ein Hinweis darauf, dass man mathematische Einsicht so nicht erreicht, Bildung so nicht ermöglicht.

Gegen den Strom schwamm jene Kollegin aus Graz, die ihre Schüler dazu motivierte, selbständig mathematische Probleme in der Lebenswirklichkeit aufzuspüren und zu lösen [Thoma]. Als sie aber in einer Lehrerfortbildung davon berichtet hatte, wie eine Schülerin in diesem Rahmen eine Näherungsformel für das Volumen von Gurken entwickelt und damit den Inhalt des vor ihr stehenden Gurkenglases berechnet hat, bemerkte ein Kollege in der Schlussbesprechung begeistert „das mit den Gurken, das lasse ich meine Schüler auch machen“. Trotz des überzeugenden Erfolges der Freigabe der Schüler zur Bildung, konnte er nur (mit dem Strom) in Richtung der Verpflichtung der Schüler auf Imitation vorgegebener Modelle denken. Nicht die Schüler sind das erste Problem für eine andere Unterrichtskultur im Mathematikunterricht, sondern wir Lehrer – ***wir*** müssen uns ändern. Das fällt natürlich schwer, wenn man selbst in Schule und Studium nichts anderes erlebt hat. Der Clown Nögge bringt auf den Punkt, was vorgeht, wenn wir uns von dieser unserer Vergangenheit nicht reflektiert lösen: „Die Torheit liebt nur sich, wird ihr ein Kind geboren, erzieht sie es korrekt zu einem neuen Toren.“ Wir entgehen dem nur, wenn wir im schulischen Alltag ab und zu zurücktreten und aus der Distanz heraus erneut über Bildung nachdenken.

„Wesenhafte Bildung wurzelt nicht im Wissen, sondern im Sein“ weist Romano Guardini darauf hin, dass wir unseren Blick auf das Ganze des Lebens richten müssen, wenn es uns wirklich um Bildung geht. Aber damit meine ich keinesfalls die modische Hinwendung zur Befindlichkeit des Schülers, die ihn als Person letztlich wieder nicht ernst nimmt. Da belegt eine Reformschule ihren Erfolg mit der Aussage einer Schülerin, die nach dem 4. Schuljahr zurückblickt:

> Es war richtig megatoll hier und ich vermisse alle Lehrer und Kinder, wenn ich gehen muss. Ich finde euch alle total geil. (J.H.,11 J.)

So etwas ist mit allerhand Psychomätzchen zu erreichen. Bildung kann sich hingegen im Mathematikunterricht ereignen, wenn ein Schüler einem Gegenstand soweit auf den Grund geht, dass er sich dabei selbst begegnet – etwa in der Weise seines eigenen Denkens bei der Unausweichlichkeit logischer Schlüsse, oder noch existenzieller im Durchtragen des Denkens gegen eine sich zunächst aufdrängende andere Anschauung. Mit diesem Anspruch über Mathematikunterricht nachzudenken, geht über die Sichtung didaktischer Modelle hinaus. Dann ist mehr gefragt:

zuerst Philosophie:		Was ist der Mensch?
dann Pädagogik:		Was ist Bildung?
und dann erst Didaktik, und zwar	nicht:	Wie kann Wissen effektiv hergestellt werden?
	sondern:	Was sind mögliche Kontexte und geeignete Situationen für Fragestellungen, die zu einer wesentlichen Begegnung mit Mathematik führen können?

Wir wollen im Folgenden einige Wegmarken zu einem solchen Weg in Richtung auf eine andere Unterrichtskultur in Augenschein nehmen. Die Ausführungen sind also immer vor diesem Hintergrund ***Mensch – Bildung – Unterricht*** zu verstehen. Die jeweils stärkere Betonung ist in der folgenden Inhaltsaufstellung angedeutet. Diese Wegmarken setze ich angesichts der Tatsache, dass es auch für den hier diskutierten Weg genügend praktische Unterrichtsvorschläge gibt. Die brauchen wir hier nicht zu bemühen. Sie werden aber kaum genutzt, weil der Horizont für ihre Realisierung fehlt. Ihn wollen wir hier aufspannen. (Dabei dienen die vielen Literaturverweise weniger der Rechtfertigung der jeweiligen Aussagen sondern eher der Möglichkeit weiterer und vertiefter Anregungen.)

(1) Die Herrichtung des Menschen	***Mensch***	Bildung	Unterricht
(2) Bildung und Mathematik in der gefährdeten Welt	***Mensch***	***Bildung***	Unterricht
(3) Jedes Kind ist auch Mathematiker – wie lange?	***Mensch***	***Bildung***	***Unterricht***
(4) Spannungsfeld von Modell und Wirklichkeit(en): Beispiel Sprache	Mensch	***Bildung***	***Unterricht***
(5) Eigenaktivität: Intensität statt „Effektivität"	Mensch	Bildung	***Unterricht***

(1) Die Herrichtung des Menschen

Johann Amos Comenius, einer der ersten, die über so etwas wie didaktisches Anschauungsmaterial nachdachten, stellte die Frage nach dem Menschen noch eindeutig an den Anfang. Er wollte die Schulen zu ***Werkstätten der Menschlichkeit*** machen. Dahinter stand die Vorstellung vom Menschen als Ebenbild Gottes. Weiter verbreitet und weithin für unser Handeln wirksam ist heute die Vorstellung vom Menschen als einer – wenn auch komplizierten – Maschine. Schulen dienen dann eher zur ***Herstellung von Funktionsabläufen*** (wie die Medizin zur Reparatur, bestenfalls zur Justierung von Funktionsabläufen). Der Ansatz einer entsprechenden Didaktik ist der der ***Vermittlung*** von Wissen an (genauer: in) den Schüler. Dabei sind sowohl das Wissen als auch der Endzustand des Schülers als wissenschaftlich abgesicherte positiv(istisch) vorliegende Systeme gedacht. Die Vermittlung hat ein festes Ziel, das sie - so der Glaube - durch Anwendung geeigneter Verfahren erreichen wird. Der gesellschaftliche Wunsch nach Sicherheit [Gronemeyer 1993] wird durch diesen technisch ablaufenden Prozess vermeintlich befriedigt. Jede gute pädagogische Tradition stellt die Frage in Umkehr der Richtung vom Stoff durch den Trichter in den Schüler aber gerade vom Schüler aus. Um ihn für seine Bildung zu gewinnen, für seine Beschäftigung mit dem lohnenden Gegenstand, setzt sie mit der ***Mitteilung*** [Gronemeyer 1997] an, legt der (sich dabei immer auch selbst mitteilende) Lehrer Zeugnis ab von der Möglichkeit der Bildung durch den Gegenstand und zeigt er vorbildhaft, was daraus resultieren kann. Möglichkeit: Hier wird der Schüler als Person freigegeben. Solchem Angebot von Bildung fehlt allerdings die Sicherheit „effektiver Hirnbewirtschaftung“ (Wolfgang Fischer), es muss mit dem Risiko leben, nicht angenommen zu werden. Es kann auch nicht methodisch-technisch festgeschrieben werden, wenn es gleichwohl erfolgversprechende methodische Ansätze gibt, man nehme etwa die Schriften von Martin Wagenschein [Bsp.: Wagenschein], die Literatur rund um die sokratische Methode [Bsp.: Loska] oder schließlich Ansätze in der sogenannten Kinderphilosophie.

Doch hat unsere dem zweckrationalen Handlungsparadigma verschriebene Gesellschaft selten die Kraft, das Risiko echter Bildung in der Schule einzugehen. Und so wird die Schule in der durch technische Manipulation bestimmten Gesellschaft organisiert für ein Lernen als mechanischem Nachvollzug angebotener Vorgaben. Diese Stoffvermittlung gewöhnt den Schüler an die Manipulation bedeutungsloser Symbole gemäß verordnetem Rezept. Wie wenig diese Manipulation dem Schüler wirklich „unter die Haut geht“, merkt man dann, wenn er aufschreibt $14 - 10 = 5$, was er „an der Zahlenreihe gerechnet“ hat, aber andererseits weiß – wenn er nämlich eine Vorstellung aktiviert – dass 4 Steine bleiben, wenn er von 14 Steinen 10 wegnimmt (Gerster). Solche Schüler scheitern u. U. an $13 - 10$, weil das eingetrichterte Operatormodell fordert, die 10 für den Einschnitt beim Zehnerübergang zu zerlegen, was ihnen nicht gelingt, weil sie aber andererseits auch keine Zahlvorstellungen entwickelt haben, die etwa die 13 als $10 + 3$ erkennen würde. Solche Zahlvorstellungen würden gebildet, wenn man in Abkehr von der Vermittlung der einen Methode zusätzlich Fragen stellte wie etwa die nach der „schönsten Zwölf“ (Schuberth), bei der die Kinder die Zahl in verschiedener Weise additiv komponieren können und überdies noch ästhetische Seiten mitschwingen dürfen wie etwa bei einer Möglichkeit $1+2+3+3+2+1$ (Symmetrie: genuin mathematisch!). Indem aber solcherart kreativitätsförderndes Vorgehen normalerweise keinen Platz hat, wächst eine Jugend heran, die zur sinnlosen Manipulation bedeutlungsloser Objekte gemäß undurchschauter Vorgehensweise sozialisiert, später in der Gesellschaft das mechanisch-technisch manipulierende Handeln ohne Rückfragen nach Sinn und Vernunft wiederum verstärken wird.
So schlägt das in die Schule gezwungene Vorgehen zum Schaden der Gesellschaft auf diese zurück.

Gesellschaft: Mechanische technische Manipulation.
→ **Schule**: Lernen als mechanischer Nachvollzug angebotener didaktischer Vorgaben.
→ → **Schüler**: Gewöhnung an Manipulation bedeutungsloser Symbole.
→ → → Durch Schule zur sinnlosen Manipulation bedeutungsloser Objekte gemäß undurchschauter Vorgehensweise sozialisierte **Erwachsene** ...
→ → → → handeln in der **Gesellschaft** mechanisch technisch manipulierend, ohne nach Sinn und Vernunft zu fragen.

Als Pädagogen schmerzt uns indessen zunächst der Schaden, den die Schüler dabei nehmen. Und ausgehend von Erich Wittmanns Ausspruch, dass „didaktische Interventionen des Lehrers schädlich sein können und es in einem Ausmaß auch sind, von dem man sich gewöhnlich keine Vorstellung macht“ [Wittmann 1991], werden wir da leider auch schnell fündig. Wenn ein Schüler erfährt, dass seine Lösung von $13 - \square - \square = 6$, nämlich $13 - 4 - 3 = 6$ falsch sei, nur weil er nicht nach dem Dogma des Zehnerüberganges vorgegangen ist (Kaiser), wenn er $7 + 5$ leicht als $5 + 5 + 2$ erkennt, mit dem Zehnerübergangsdogma $7 + 3 + 2$ aber seine Schwierigkeiten hat [Wittmann 1994], dann sind das Hinweise darauf, dass die These von Gerster, auf solche Weise würde ***Rechenschwäche generiert***, durchaus ins Schwarze treffen könnte. Was wäre aber, wenn mehr und mehr Schüler von Therapeuten und Spezialprogrammen betreut würden, während bei weniger dogmatischer Vermittlung und mehr Freigabe zu echter mathematischer Aktivität solche Rechenschwäche gar nicht aufkäme? Natürlich: Therapie zur Verbesserung der Funktion der „Maschine Mensch“ passt in das Paradigma unserer Gesellschaft.

Nur wenn wir von diesem Vakuum an Bedeutungen, Vorstellungen ja an ***Sinn*** wissen, können wir in der weiterführenden Schule zu einer Veränderung ansetzen.

Eine „natürliche“ Dialektik sorgt dafür, dass die immer stärker durch Kalkulation in den Griff genommene Welt in ihrer galoppierenden Veränderung immer weniger kalkulierbar ist. Ob man die soziologische Beschreibung der Entwicklung in Richtung auf ein neues Mittelalter nimmt [Minc] oder die Hinweise auf die Notwendigkeit ganz anderer Lebensvorbereitungen in der zerfallenden Gesellschaft [Forrester] oder auch positive Entwürfe einer Weltbürgergesellschaft [Beck], überall tritt uns die Frage entgegen, ob die Gewöhnung des Schülers an den Nachvollzug vorgegebener Routinen noch eine Lebensvorbereitung sein kann.

Die Sinnleere solchen Unterrichts, der sich ja durchaus bis in das Abspulen von Standardvorgehensweisen in der Analysis fortsetzt, schlägt auch noch anders auf die Gesellschaft zurück: In Deutschland studieren im Augenblick trotz allerbester Prognosen für die berufliche Laufbahn viel zu wenige Schüler Mathematik. Eine Untersuchung der Akademie für Technikfolgenabschätzung Stuttgart gibt dafür als zentralen Grund an, dass die Jugendlichen im Mathematikunterricht zu wenig Sinn erfahren hätten [Zwick]. Und Sinn lässt sich eben – entgegen der aus dem Englischen nachgeredeten Ausdrucksweise – nicht „machen“.

(2) Bildung und Mathematik in der gefährdeten Welt

Dass die Mathematik in unserer Gesellschaft zwar faktisch ***allgegenwärtig*** ist, im Bewusstsein der Zeitgenossen aber bestenfalls eine Nische besiedelt, liegt daran, dass sie gleichzeitig mit ihrem Einzug in alle Bereiche vom Alltagsleben bis zu den Wissenschaften immer besser unter glatten Oberflächen ***verborgen*** wird. Man sieht sie nicht im Fernsehapparat und nicht in den dazu nötigen Sendeanlagen, nicht in den Raketen, die den Sendesatelliten auf die Umlaufbahn brachten und nicht in den Maschinen, die all dieses herstellten. Die sanfte Stimme des Autopiloten verbirgt die dahinterstehende harte Mathematik. Es ist gleichzeitig immer mehr mathematische Kompetenz zur Herstellung unserer Gebrauchsprodukte nötig und immer weniger zu ihrer Benutzung. Mit dem Verschwinden hinter die sichtbaren Fassaden verschwindet die Mathematik auch aus dem allgemeinen Bewusstsein, obwohl sie dermaßen in unser Leben eingreift, dass wir dieses Eingreifen dringend jeweils bedenken müssten. Dieser Widerspruch wird inzwischen vermehrt wahrgenommen, so etwa in einem Werk, das am Anfang des neuen Jahrtausends einen gewissen Überblick über die Mathematik anbietet unter dem treffenden Titel „Mathematics Unlimited“. Dort heißt es: „In today's society, mathematics is present more widely than ever before, but this is rarely acknowledged, even by mathematicians." [Bourguinon] Denken wir zum Beispiel daran, dass die heutige Welt in allen Bereichen durch eine Flut von Bildern bestimmt ist. Diese Bilder, selbst wenn sie ursprünglich Fotos waren, werden aber immer stärker durch auf Mathematik beruhenden Bearbeitungsverfahren verändert. Das heißt, dass der Zeitgenosse nicht davon ausgehen darf, ein Bild sei einfach Abbild von Realität. Doch wusste schon Goethe, dass man nur sieht, was man weiß. Also muss man wissen, was hier „die Mathematik angerichtet haben kann“, um einen entsprechenden Blick dafür zu entwickeln.

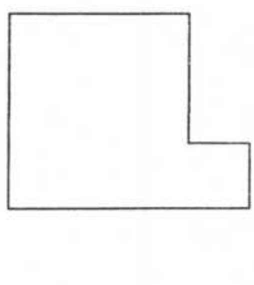
Mathematikunterricht rechtfertigt sich zunehmend weniger dadurch, dass man später Mathematik (direkt) brauchte, sondern daher, dass man eine Grundlage braucht, um die immer stärker durch Mathematik bestimmten Abläufe der täglichen Lebens- und Arbeitsumgebung wenigstens im Ansatz zu verstehen. Mathematische Modelle normieren über technische Entwicklungen, über wirtschaftliche und politische Entscheidungen unsere Lebensvollzüge. Die Mathematik verfügt nachgerade über alles, womit auch ***über uns selbst verfügt wird***. Wenn wir wirklich eine demokratische Vorstellung von unserer Gemeinschaft haben, nicht akzeptieren, dass wir total verfügt sind, dann hat das Konsequenzen für die Notwendigkeit mathematischer Bildung [Köhler 1998]. Bildung ist der immer erneute Versuch, uns als Person in die eigenen Verfügung zurück zu geben.

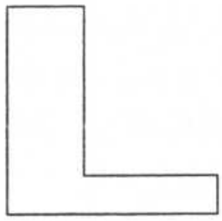
Mathematische Modelle und Verfahren sind geeignet, Dinge oder Vorgänge funktionieren zu lassen auf eine Weise, die, einmal in Gang gesetzt, menschlichen Eingriffen weitgehend entzogen ist. Wenn daher nicht beizeiten die notwendigen gesellschaftlichen (oder persönlichen)

Gestaltungsprioritäten eingebracht werden, kann das zu einer ***Dominanz von Automatismen*** führen, die unser Leben bestimmen, ohne je wirklich überlegt gewählt worden zu sein. Auf diese Weise kann Fortschritt gesellschaftlich zum „großen Sprung rückwärts“ werden, den der Ökonom und Publizist Saul so charakterisiert: „ ... der große Sprung rückwärts ... ist unser Sprung zurück in die Besinnungslosigkeit, in den willkommenen Zustand eines Untertanen, der nur als Rädchen in einer von zehntausenden privater und öffentlicher Körperschaften funktioniert, befreit von aller persönlichen, interessefreien Verantwortung für seine Gesellschaft. Deshalb kapituliert er vor der Verführung einer ... apathischen Geborgenheit, die ihm jede Ideologie andient.“ [Saul]

Das Gegenbild des Bürgers, der nicht dankbar in bequeme Ideologien eintaucht, sondern Verantwortung für sein Leben zu übernehmen bereit ist und dazu kritisch nachfragen will und kann, kann aber gerade aus einem entsprechenden Mathematikunterricht heraus möglich werden. Nehmen wir ein Beispiel:

> „Am Ende einer Unterrichtsstunde, in der wir den Satz: „Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre Winkel paarweise gleich sind“, behandelt hatten, gab ich als Hausaufgabe auf: Untersucht, ob der Satz auch für Vielecke (mit mehr Ecken als drei) gültig ist. Ihr dürft Vierecke oder Fünfecke etc. zeichnen, um probierend das Problem anzupacken. Die Winkel A, B, C, etc. des einen Vielecks müssen gleich den Winkeln A’, B’, C’, etc. des anderen sein. Die Frage ist: Sind dann die Vielecke ähnlich? Ich vergewisserte mich, daß die Schüler die Aufgabe verstanden hatten und war neugierig darauf, was sie am folgenden Morgen bringen würden.
> Eine große Gruppe der Klasse meinte gefunden zu haben, daß der Dreieckssatz auch für Vielecke gültig sei. Ein Junge, der sonst nicht besonders auffiel, sagte, daß der Satz für Vielecke ungültig sei. Eine kleinere Gruppe hatte kein Ergebnis gefunden. Die Schüler der großen Gruppe zeigten eine merkbare Sicherheit. Offenbar lag ein Mehrheitsgefühl dahinter. Man konnte eine Überlegenheit gegenüber dem Jungen, der das Gegenteil behauptete, spüren. Es war ein Erlebnis, die Reaktion der Mehrheit zu sehen, als der Junge zur Tafel ging und zwei verschiedene Sechsecke zeichnete ...“ [Ulin]





In einer durch exzessive Mathematisierung inzwischen bis hin zum Überleben der Menschheit gefährdeten Welt sind wir zur Aufklärung verdammt. „Wichtig wird sein, dass die Gesellschaft ein Bewußtsein davon entwickelt, daß sie im mathematischen Alltag sich selbst in bestimmter Weise ordnet und daß es dabei also um sie selbst geht.“ [Davis/Hersh] Dazu ist eine Vorstellung von der Besonderheit mathematischen Vorgehens nötig. Wiederum sei an einem Beispiel angedeutet, dass so etwas schon früh und bei bescheidenen Inhalten wachsen kann.

> Da zeigte sich in einer Fernseh-Quiz-Show, dass keiner der Anwesenden in der Lage war, vier Bruchzahlen der Größe nach zu ordnen. Welche Verkrampfungen müssen dahinter stecken, dass man nicht zu einer einfachen Überlegung imstande ist wie etwa: Wenn diese Zahl ziemlich nahe an $\frac{1}{2}$ liegt und jene fast 1 ist, dann muss diese ja kleiner als jene sein. Das ist sicher kein Hexenwerk, wenn man eine grundsätzliche Vorstellung von den Zahlen hat und wenn man nicht, zum Beispiel aus Angst oder Aversion, eine unüberwindbare Barriere vor dem Lösen eines mathematischen Problems spürt. Dabei hätte man im Mathematikunterricht über die sicherlich hier und da nützliche Fähigkeit, zwei verschiedene Bruchzahlen (in der Praxis also verschiedene Anteile irgendeiner Sache) miteinander zu vergleichen hinaus etwas Tiefsinniges über das Vergleichen überhaupt lernen können. Nämlich, dass man für einen Vergleich einen geeigneten Maßstab braucht. Wie oft wird das im Leben außer Acht gelassen, wie oft werden deswegen unhaltbare Urteile gefällt. Wenn z.B. angesichts der möglichen Schließung vieler Bahnfahrkartenschalter jemand urteilt, das sei nur normal, die Lufthansa habe auch nicht in jeder Kleinstadt ein Büro, dann werden da Äpfel mit Birnen verglichen. Der Vergleichsmaßstab wären hier doch wohl die Einsteigemöglichkeiten. Also wäre zu fragen, ob die Lufthansa an jedem von ihr bedienten Flughafen einen Schalter hat, das entspräche einem Schalter in jedem Bahnhof. Oder sehen Sie einen besseren Vergleichsmaßstab? Er scheint aber nicht offensichtlich zu sein, und vielleicht ist er auch nicht eindeutig. Wie so oft: Überall ist es schwerer als in der Mathematik. Da hat man beim Größenvergleich von Brüchen mit dem gemeinsamen Nenner einen einfachen und immer geeigneten Vergleichsmaßstab:

$\frac{2}{6}$ sind $\frac{14}{42}$ und damit kleiner als $\frac{6}{7}$, die ja $\frac{36}{42}$ sind. Und diesen gemeinsamen Nenner kann man leicht durch Multiplikation der Nenner erhalten. Freilich ist das den meisten Schülern nicht bewusst geworden, da sie sogleich auf die Suche nach dem manchmal (!) optimalen Hauptnenner verpflichtet wurden, was bei ihnen ein Gefühl der Unsicherheit oder gar Angst hinterließ. Wie so oft erfuhren sie nicht zunächst die Sicherheit der einfachen Möglichkeit (Nennermultiplikation) und erst darüber hinaus die zusätzliche Chance einer optimalen Wahl, sondern wurden zu dieser Wahl gezwungen, ehe sie merken konnten, was da überhaupt vorgeht. Weniger wäre mehr gewesen, sogar viel mehr, hätte man doch über die praktische Möglichkeit der immer leicht ausführbaren Nennermultiplikation hinaus auch ***das*** erfahren können, dass viele Dinge, hier ein Vergleich, (nur dann) leicht in den Griff zu bekommen sind, wenn man ein mathematisches Modell dafür hat. Dazu muss man natürlich Dinge, wie die angesprochene Zeitungsmeldung über die Fahrkartenschalter, auch in den Unterricht einlassen.

Man könnte sogar erfahren, dass darin geradezu eine Gefahr liegen kann, nämlich die voreilige Entscheidung für die mathematische Behandlung eines Problems auf Grund der ***verführerischen Einfachheit des mathematischen Modells***, die bei genauerem Hinsehen das Problem u.U. unangemessen verkürzt.

Es ist heute unumgänglich, sich ***von Geräten und Vorgängen ein Bild zu machen***, auch wenn man sie nicht völlig durchschaut. Wie anders geht man zum Beispiel mit einem Thermostaten um, wenn man nicht annimmt, dass er die Temperatur konstant hielte, sondern weiß, dass er den Temperaturverlauf einer Sägezahnkurve erzeugt. Sich dieses Bild zu machen, führt zu sehr viel angemessenerem Umgang mit dem entsprechenden Problem bzw. Gerät.

Wieder korrespondiert der persönlichen eine gesellschaftliche Notwendigkeit. Das Verhältnis der Gesellschaft, also der Bürger zur Mathematik muß sich ändern in Richtung auf einen Umgang, der nicht jedes Problem flieht, sobald es „nach Mathematik riecht". Also muss sich die Erfahrung des Schülers im Mathematikunterricht ändern. Das beginnt damit, dass dort nicht Angst eingeflößt wird (den Hauptnenner suchen zu müssen) [Köhler 1995], dass „nicht Niederlagen und Blockierungen provoziert werden ... wegen der Gefahr, daß dadurch eine Kluft entsteht zwischen denen, die Mathematik können, und denen, die nicht einmal Fragen zu ihrer Anwendung zu stellen wagen." [Nissen] Erstere nämlich „besteigen den Bulldozer, werfen den Motor an und ebnen die Landschaft ein (und das möglicherweise ohne zu merken, was sie da eigentlich tun)" [Molander]. Und letztere sehen zu, wie ihr Lebensraum plattgewalzt wird. [Köhler 1998]

Sich ein Bild machen zu können, eine Vorstellung zu haben, einen Hintergrund zu schaffen für die Wahrnehmung der Welt (man sieht nur, was man weiß), ist ein Hauptziel heutigen Mathematikunterrichtes. In dieser Hinsicht müssen wir eine ***Tendenz auf die Welt*** in den Unterricht bringen. Und in dieser Richtung liegt auch der Sinn, den der Schüler anmahnt, wenn er fragt, wozu er das im Unterricht Behandelte brauche; er meint keineswegs, dass er nur später direkt anwendbare Verfahren lernen will. Diese Tendenz auf die Welt ist durch TIMSS in die allgemeine Aufmerksamkeit gerückt aber gleichzeitig wieder gefährdet. Denn schon beginnt eine Welle neuer Vergleichsuntersuchungen, die die Gefahr birgt, dass doch wieder ein messbarer Prozess der Herstellung von Schülerreaktionen die Oberhand gewinnt.

Bildung im angesprochenen Sinne muss Denken provozieren. Wie nötig wir das haben, sieht man z.B., wenn nicht nur dumme Journalisten mit der Aussage „wegen der Sonne steigen die Ozonwerte" der Sonne anlasten, was ***wir*** zu verantworten haben, sondern sogar Wissenschaftler solcher Umkehrung folgen und beginnen wollen, die Umlaufbahn der Erde zu ändern [Info 3]. Mathematische Bildung kann zu einem ***Laienurteil*** [Köhler 1993] führen, das gegen solche Zumutungen einen argumentierbaren eigenen Standpunkt setzt im Sinne Magnus Enzensbergers, der zur unzugänglichen Insel der Mathematiker sagt: „Auch für mich bleibt die Zugbrücke zu ihrer Insel hochgezogen. Das hindert mich jedoch nicht daran, den einen oder anderen Blick auf das andere Ufer zu werfen." [Enzensberger]

Solchen pragmatischen Ansätzen könnte man wegen ihrer Gesellschaftsorientierung versucht sein, die pädagogische Rechtfertigung abzusprechen. Aber erstens geht es dabei schließlich immer auch darum, dem Schüler in dieser Gesellschaft Orientierung und selbstbestimmtes Handeln zu ermöglichen, und zweitens birgt diese Hinwendung zu echten mathematischen Problemen die Chance, dass der Schüler wirklich Mathematik treibt. Mathematik zu treiben – nicht nur ein paar mathematische Schablonen zu handhaben – ist ***Sinnsuche in einer extremen Realisierung menschlicher Seinsmöglichkeit***. Wenn wir das in unserem Unterricht zulassen und fördern, dann begegnen den Schülern vom ersten Erstaunen über das Immer-weiter-zählen-Können, über das Ringen mit Mächtigkeitsbegriffen bei der Gleichmächtigkeit der natürlichen mit den („halb so vielen") geraden Zahlen bis hin zu Konsequenzen des Gödelschen Satzes eine aufregende und abenteuerliche Welt. Aber wir verschweigen (wir versäumen zu säen), was die Mathematik seit Gödel alles zusammengetragen hat. Etwa, dass „die Welt so reich ist, wie die Sprache, mit der wir über sie reden", erfahren unsere Schüler nicht (Löwenheim-Skolem-Satz der Modelltheorie), statt dessen gewöhnen sie sich in einem spracharmen Mathematikunterricht an die mechanische Abarbeitung von Kalkülen. Die von Alexander Wittenberg in erkenntnistheoretischer Hinsicht formulierte Aussage, primär sei uns ein ***Erleben*** gegeben und nicht eine Wirklichkeit [Wittenberg 1968, S.215], gäbe indessen auch eine Richtschnur für eine ***echte Begegnung der Schüler mit der Mathematik*** [Wittenberg 1963] ab. Das eben angesprochene Erleben der Weiterzählens ist schon eine erste solche Begegnung. So begann auch die Menschheit in ihrer Kindheit. „Ich gehe dreimal in das Scheffelmaß hinein“ erzählt die Variable von sich in einer Aufgabe des Papyrus Rhind. Gestatten wir unseren Schülern, die Variable einer Gleichung so zu ***erleben***? Gemeinhin nicht: Wir stöhnen aber dann über die Schwierigkeit, die Algebra der Mittelstufe erfolgreich zu unterrichten. Und vergessen wir nicht, dass die Bildung mathematischer Begriffe überhaupt im Erleben ansetzt. Der Eigenbewegungssinn etwa, der das Kreisen der Augen wahrnimmt, ist der erste Anlass zur Bildung des Begriffes Kreis, nicht das didaktische Modell des Mathematikbuches.

(3) Jedes Kind ist auch Mathematiker – wie lange?

Der Philosoph Hans-Georg Gadamer hat im Jahre 2000, zu seinem hundertsten Geburtstag, auf zwei für uns bemerkenswerte Sachverhalte hingewiesen:

Mathematik ermöglicht das Lernen ohne Erfahrung.
Die Mathematik ist unser globales Schicksal.

Gadamer 2000

Den ersten Sachverhalt, der natürlich nicht die genetisch notwendigen Erfahrungen für den Erwerb des entsprechenden Denkvermögens übersieht, macht man sich gemeinhin nicht klar, weshalb es auch wenig im allgemeinen Bewusstsein ist, dass Mathematik wegen ihres speziellen Zugriffes auf die Welt in gewisser Weise gerade nicht schwierig ist (falls man sich auf ihre Reduktion der Wirklichkeit einlässt).

> Stellen Sie sich vor, Sie müssten drei Menschen mit ganz verschiedenen Persönlichkeitsmerkmalen A: (b/x/j), B: (c/k/m) und C: (a/j/c) mit einer Aufgabe betrauen, bei der es auf gute menschliche Zusammenarbeit ankäme. Würden Sie abschätzen können, ob das wohl klappte?
> Wie einfach ist es demgegenüber, in einem entsprechenden Modell zu wissen, wie der Vektor S(6/4/19) aus A(3/2/7), B(1/2/3) und C(2/0/9) als Summe resultiert

– und das kann jeder erlernen, dazu ist keine große Welt- bzw. Lebenserfahrung nötig. Was allerdings dazu nötig ist, ist ein Mathematikunterricht, in dem Schüler diese Einfachheit auch erleben. Die sattsam angeprangerte Verwechslung des Tiefsinnigen mit dem Komplizierten führt zu oft zu ganz anderen Erfahrungen der Schüler, mit dem Ergebnis einer bleibenden Verkrampfung gegenüber mathematisch aussehenden Problemen. Nehmen Sie das Beispiel einer Reihe von drei vollen und daneben drei leeren Gläsern und der Aufgabe „Du darfst nur ein Glas bewegen, dann soll immer abwechselnd ein volles neben einem leeren Glas stehen." Wie viele Menschen scheitern an der Aufgabe, da sie sich so ängstlich auf „nur ein Glas bewegen" fixieren, dass sie gleich noch annehmen, das Glas dürfe nur vorsichtig in der Ebene verschoben werden. Gerade nach ihren Erfahrungen im Mathematikunterricht haben sie keinen Mut zu dem „Höhenflug", das Glas auch im Raum zu bewegen, oder gar zu dem Wechsel der Sichtweise, von dem anders zu verteilenden Wein her zu denken. Hier müssen wir ansetzen und ***Lockerheit säen statt Verzagtheit zu erzeugen.***

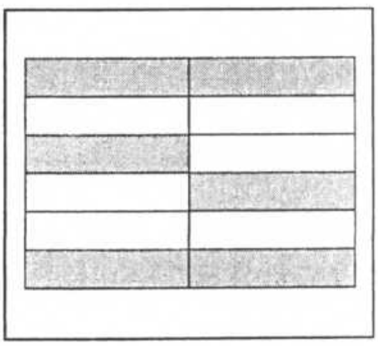
Weil Mathematik einfach ist und auf übermäßig tiefe Lebenserfahrung gemeinhin nicht angewiesen, ist sie so erfolgreich, und daher rührt gerade, dass sie zu unserem globalen Schicksal geworden ist. Ihre leichte Zugänglichkeit ist so gesehen gerade das Erschreckende an ihr. Gadamer bezieht sich auf die ungeheuerlichen Erfolge der mathematisierenden Wissenschaften, die uns in vieler Beziehung geradezu an den Abgrund gebracht haben. (Mit dem Wissen um einen gedeihlichen sozialen Umgang etwa, einen friedlichen Umgang miteinander und einen Weltumgang ohne Ausplünderung der Erde durch brutale Konzerne und mafiöse Politiker – aber auch durch unempfindsame Verbraucher – kamen wir nicht entfernt so weit voran.)

Vor diesem Hintergrund einer zwar spezifischen aber durchaus zugänglichen menschlichen Tätigkeit erstaunt es nicht, dass jedes Kind zunächst beginnt, mathematisch zu denken. (Vergleichen Sie etwa die erhellenden Beispiele in [Freudenthal].) Wobei wir mit der Sprechweise *mathematisch zu denken* vorsichtig sein müssen. Es ist fragwürdig, für den Unterricht zwischen mathematischem Denken, zu dem viele vermeintlich nicht fähig wären, und Alltagsdenken zu unterscheiden. Eigentlich ist es immer das gleiche Denken, das sich lediglich mit verschiedenen Methoden auf verschiedene Gegenstände richtet. Es wäre eine sehr umfangreiche Erörterung wert, den durch diesbezügliche Konfusionen in der Schule entstehenden Hürden vor der Mathematik nachzugehen. Die aktuelle Forderung von ***fehlerfreundlicher*** Unterrichtsweise ist zum Beispiel wesentlich darauf angewiesen, immer schon vorauszusetzen, dass der Schüler denken kann, dass er aber möglicherweise von falschen Voraussetzungen ausgegangen ist, ein falsches internes Modell benutzt (vgl. etwa die subjektiven Erfahrungsbereiche Bauersfelds), irgendwann nicht konsequent gewesen ist u.ä. Und es sind andererseits gerade die logischen Ungereimtheiten des Mathematikunterrichtes, die beim Schüler das Gefühl hervorrufen, hier dürfe man nicht normal denken, was dann zu solchen Absurditäten führt wie den jederzeit bereitwillig bearbeiteten „Kapitänsaufgaben", nach deren Bearbeitung eine Klasse dem Erstaunen ihrer Lehrerin jüngst entgegensetzte: „eigentlich hätten sie immer so unsinnige Sachen gemacht" im Mathematikunterricht [Weber]. Jeder Schüler begann als Kind, Mathematik zu treiben. Leider ist das bis zum Schuleintritt nicht soweit gediehen wie der Erwerb der Muttersprache. Wäre diese ähnlich wenig vorbereitet und stark auf die Schule angewiesen; was meinen Sie, wie man dann gemeinhin über die Möglichkeit dächte, dass alle Schüler diese Sprache zu beherrschen lernten?

Das normale Denken reichte schon hin für den Mathematikunterricht, wenn wir ausreichend zur Kenntnis nähmen, dass der Schüler es eigentlich durchaus nutzen möchte und das sogar auch weit mehr tut, als gemeinhin angenommen wird. Es gibt genügend Hinweise darauf, dass etwa 80% aller Schülerfehler durchaus nicht auf Gedankenlosigkeit beruhen. Der Schüler hat sich sehr wohl etwas dabei gedacht. Aber interessiert sich wirklich jemand dafür, was er gedacht hat? Hier liegen die Probleme, die aus allen Kindern, die zunächst für die Mathematik offen sind, viele machen, die vermeintlich nicht zu mathematischen Tätigkeiten in der Lage seien. ***Der Weg*** **aller** ***Menschen zur Mathematik ist durch unseren Unterricht gefährdet***. (Denken wir demgegenüber an die vielzitierten brasilianischen Straßenkinder mit ihrem ausreichenden Rechenvermögen.) Wenn wir uns dieser durch genügend viele Analysen und Untersuchungen belegten Wahrheit verschließen – was psychologisch natürlich verständlich ist –, können wir unserer Verantwortung gegenüber den Schülern nicht gerecht werden. Wenn wir hingegen unter dem Horizont dieser Wahrheit über Unterricht nachdenken, kommen wir auf so manchen bedenkenswerten Vorschlag.

Dér Weg aller Schüler zur Mathematik wird unterstützt, wenn die Schülerin, die ein E nachmalen soll und ein  malt, nicht ein „falsch“ erntet, sondern die Nachfrage, warum sie das E so gemalt habe. Ihre Antwort „die Harke funktioniert so besser“ lehrt uns viel über die ursprüngliche Kreativität, die wir im Unterricht zu pflegen haben, und sie ist gleich ein Beleg für die obige Behauptung, dass die Schüler viel mehr denken, als wir gemeinhin annehmen. Pflege dieser Kreativität heißt einmal, sie in den Unterricht hinein zu nehmen und sich nicht durch sie gestört zu fühlen wie offensichtlich jener Kollege im folgenden Beispiel, der „leider“ eine Schülerleistung anerkennen musste:

Da sollten seine Schüler 3/6 als Teilfläche eines Rechtecks schraffieren. Einer von ihnen fragte ihn, ob seine Lösung (rechts) richtig sei. „Da musste ich wohl ja sagen“ meinte der Lehrer zu einem Kollegen, dem er den Vorfall erzählte. Kein Gedanke daran, wie ungewöhnlich phantasiereich die Lösung war, welche mathematischen Weiterentwicklungen in ihr angelegt sind, was man alles damit machen, womit man daran anknüpfen könnte.

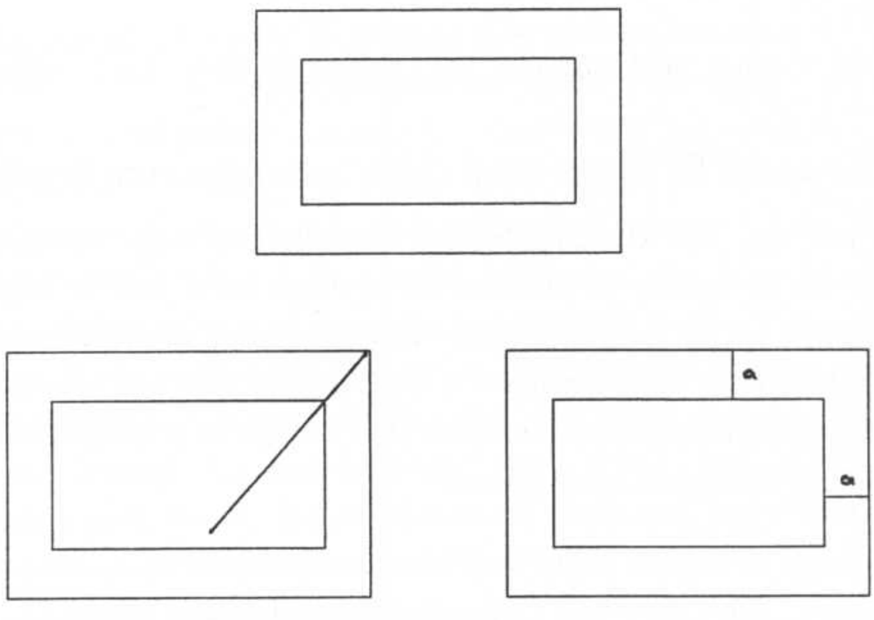


Nein, die Kreativität des Schülers störte ihn, er „musste wohl“ eine Lösung anerkennen, die mehr war, als das konvergente Reagieren auf die enge Erwartung des Lehrers durch die Darstellung der offensichtlich erwarteten (und womöglich schon zuvor einmal erwähnten) Einteilung.

Diese Pflege bedeutet darüber hinaus, immer erneut Möglichkeiten mathematischer Herangehensweisen zu säen. Die Pflege nimmt die ***Unstetigkeiten im Lernprozess*** ernst und gibt Impulse von denen nicht gleich ein sicher ablaufender kalkulierbarer Prozess erwartet wird. Bei Hans Freudenthal steht das folgende schöne Beispiel.

> Eine Lehrerin begegnet den Aussagen ihrer Schüler, dass es leichter sei eine Eins zu würfeln als eine Sechs mit dem Herstellen von Würfeln aus Karton. Eine in verbreiteter Betrachtung „zeitraubende" Tätigkeit. Danach aber war die Ausgangsfrage kein Problem mehr! [Freudenthal, S.180]

Was hier geschehen war, nutzte schon Goethe für sich, er zeichnete, um besser zu beobachten, um etwas zu sehen, nicht um eine Zeichnung zu haben. Mathematisch sehen zu lernen, ist ein wesentliches Ziel des Mathematikunterrichtes. Nehmen Sie folgendes Beispiel für das Goethesche *man sieht nur, was man weiß*. Wie kann man sehen, dass die Rechtecke nicht ähnlich sind?



Der Weg heißt: Fragen aufnehmen.

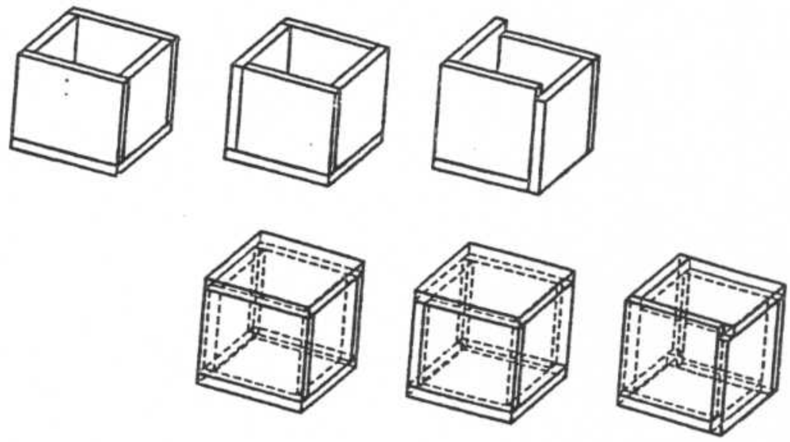
> Eine Unterrichtssituation, in der 5.Klasse, in der das Koordinatensystem behandelt wird und Punkte in das Koordinatensystem eingetragen werden. Es entstehen verschiedene Figuren. Da fragt eine Schülerin zu einer solchen „ist das ein Quadrat?" Quadrat ist nicht Unterrichtsgegenstand und die Frage wird ignoriert. [Wurz] Später wird das Quadrat Unterrichtsgegenstand sein, die Schülerin aber kein Inte-

resse mehr daran haben. Warum nimmt man die Frage nicht auf? Möglicherweise wegen der noch nicht vorhandenen Methoden zu ihrer Beantwortung. Dabei könnte gerade deswegen ein ungeahnter Sog zu mehr mathematischen Überlegungen entstehen.

Wird das Interesse der Schüler aufgenommen, wird später möglich, wirklich zu verhandeln, was es denn heißt, dass im gleichschenkligen Dreieck die Basiswinkel gleich groß sind, nämlich: *Wenn* in einem Dreieck zwei Seiten gleich lang sind, *dann* sind deren Gegenwinkel gleich groß. *Wenn*, denn das lässt sich ja nicht feststellen. [Schmid]. Und ein solcher Weg zu wirklichem Verständnis birgt die Chance, dass die Schüler in der Oberstufe ansprechbar sind auf Probleme wie etwa die Existenz eines Flächeninhaltes. Ein solcher Weg kann durchaus verhindern, dass Schüler des 10. Schuljahres einen Standpunkt zur Mathematik gewonnen haben wie jene, die angesichts eines stochastischen Problems fragten „sollen wir das mathematisch beantworten, oder wie es wirklich ist?"

Wir müssen einerseits das Denken stärker herausfordern, was oft durchaus in realen Handlungssituationen geschehen kann und muss.

Beispiel: Wie kann man einen Würfel aus Platten zusammenbauen? Welche Vorteile hat welche Lösung? Geht es mit lauter gleichen Platten?



Wir müssen andererseits das dann vom Schüler Gedachte voll annehmen. Das heißt oft, von unseren Standardverfahren Abstand zu nehmen. Wenn ein Schüler aus der Angabe, 40% entsprächen 800 DM, auf 100% schließen soll, er von 40% zu 10% geht, von da zu 90% und durch Addition beider zu 100%, dafür aber ein „falsch" erntet, weil er nicht das richtige Schema verwendet hat, und wenn man ihm weis machen will, dass nur jenes Schema das „mathematisch richtige Verfahren" zur Lösung dieser Aufgabe sei, dann hat er wohl keine Chance zu erfahren, was Mathematik im Wesen ist. Und der Verdacht ist nicht ganz unberechtigt, dass es auch an solchen Vorkommnissen liegt, wenn sich im Laufe der Schulzeit immer mehr Schüler geistig vom Mathematikunterricht abmelden (auch spätere Minister, Industriekapitäne ...).

(4) Spannungsfeld von Modell und Wirklichkeit(en): Beispiel Sprache

Der Mathematikunterricht bietet die hervorragende Möglichkeit, gegen eine Medienwelt, die den Schein, das bloße Meinen wieder über das weiterfragende Erkennen triumphieren lässt, die Frage nach Modell und Wirklichkeit aufzunehmen. Die gegen die angesprochene Medienwelt notwendig zu setzende Aufklärung beginnt in der Abgrenzung von Modell und Wirklichkeit. Dazu ist durchgängig das von TIMSS angemahnte stärkere Gewicht von Verständnis im Unterricht nötig.

Wir formulierten schon: Die Welt ist so reich wie die Sprache, die wir zu ihrer Beschreibung zur Verfügung haben. Der Weg der Bildung ist daher weitgehend ein Weg der Sprachbildung, und das bis in Einzelheiten des Lernprozesses hinein [Maier/Schweiger/Reichel]. Wie muss dieser Weg gestaltet werden? Wie so oft, gilt zunächst: ***Es gibt nur einen erfolgversprechenden Weg: den selbst gegangenen.*** Wie wir dem Schüler Verständnis nicht reichen können, so auch nicht die zu entwickelnde Sprache für die Welterkenntnis. Das hat Konsequenzen: Wenn der Schüler diese Sprache selbst entwickelt, kann nicht damit gerechnet werden, dass er zu allen etwa im Lehrbuch vorgesehenen, oft keineswegs sachlich notwendigen Begriffsbildungen kommt. Denn für seinen Weg steht dann als Korrektiv nur die Sache selbst zur Verfügung.

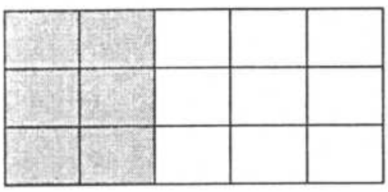
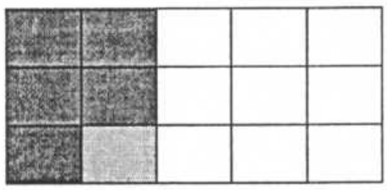
Aber werfen wir zunächst einen Blick auf das Kunstwerk Sprache, dem wir weithin zu wenig Aufmerksamkeit zuteil werden lassen. Nehmen Sie die Aussage *irgend jemand hat immer Geburtstag*. Sie ist so richtig wie ihre Negation *niemand hat immer Geburtstag*. (Beachten Sie die Rolle der Musik, der Sprachmelodie!) Nur dass hier Negation für eine formal gereinigte Sprache gedacht ist, um die es sich bei diesen umgangssprachlichen Aussagen nicht handelt. Kollisionen auf dieser Ebene geschehen im Mathematikunterricht ständig. Sie aufzuklären, unterbleibt sträflicherweise.
Dabei handelt es sich bei dieser Aufklärung durchaus, über ihre Notwendigkeit für einen erfolgreichen Mathematikunterricht hinaus, um einen allgemeinen Beitrag zur Bildung des Schülers, dessen sich der Mathematikunterricht nicht zu schämen brauchte. Beispiel:

> Für die gemeinsame Reise von 1 oder 2 Erwachsenen und beliebig vielen eigenen Kindern oder Enkeln bis 17 Jahre gilt der ICE-Familien-Sparpreis – an allen Tagen. Ohne Einschränkung.

Beliebig viel bedeutet in diesem Prospekt der Deutschen Bahn aber *mindestens eins*. Wäre es nicht angenehm, wenn eine solche Bedingung eindeutig formuliert würde? Aber statt des Bemühens um angemessene sprachliche Aussagen greift heute eine unglaubliche Schlamperei Platz. So preist denn ein Schulbuchverlag seinen Dienst an:

Klett ThemenDienst Schule – Wissen – Bildung

In dem Konglomerat von Substantiven gibt es kleine und große Zwischenräume und solche mit und solche ohne Bindestrich. Eine grammatische Regel ist nicht mehr erkennbar, weder eine gültige noch eine bewusst neu gesetzte. Damit fehlt auch jede Hilfe, die Zeilen sinnvoll zu deuten. Übrigens wird hier deutlich, dass die Sprache Regeln hat, die Klammerungen bewirken, wie wir sie in der Algebra auch brauchen. Damit sehen wir erneut: Die Mathematik ist nicht grundsätzlich, sondern vor allem graduell anders.

> Und in diesem Umfeld wird dann im Mathematikunterricht verlangt, dass der Schüler bei der Aufgabe, 1/3 von 2/5 im linken Schema zu schraffieren, genau eine mögliche Fragestellung sieht. Er interpretiert aber vielleicht, das Drittel im Gebiet der 2/5 zu schraffieren, und kommt zur rechten Lösung, für die er ein *falsch* erhält in einer Situation, in der sich niemand dafür interessiert, wo hier die sprachliche Kollision geschehen ist.
>
> 
> 
>
> Fünf Prozent von fünf Prozent sind eben auch 100%, hier besteht eine Absprachenotwendigkeit.

Lässt sich der Unterricht auf solche Probleme ein, wird er über die reinen mathematischen Kontextprobleme hinaus zum Dialog als Mittel der Wahrheitsfindung. Da kommen pädagogische Dimensionen in den Blick, die man leider weithin kaum für den Mathematikunterricht reklamiert [Heitger]. Dabei ist gerade er geeignet, die Botschaft des Computers, nämlich das Genügen ***eindeutiger Effekte***, zu relativieren.

Ein sprachbewusster dialogischer Mathematikunterricht erst hat die Chance, einen Weg des Schülers zur Bildung von Begriffen zu öffnen. Dieser Weg ist zugleich der Weg aus der „ungeteilten" Wirklichkeit zum mathematischen Modell. Indem er selbst gegangen wird, gibt er die Erfahrung von der Differenz zwischen Modell und Wirklichkeit für das Leben mit. Die in diese Richtung zielenden Impulse etwa von Wagenschein und Wittenberg sind in den letzten Jahren von Gallin und Ruf immerhin so salonfähig gemacht worden, dass Lehrer vermehrt Ansätze in dieser Richtung wagen. Ein dialogischer Mathematikunterricht schult allgemein die Wahrnehmung, die Achtsamkeit [Brodbeck], und ist damit kreativitätsfördernd. ***Begriffserwerb*** zu fördern, statt mathematische Vokabeln zu pauken, heißt zum Beispiel auch, Gegebenheiten wie der Spannung zwischen inhaltlicher Verschiedenheit und logischer Äquivalenz nicht mit faulen Kompromissen ausweichen zu wollen. Der Schüler muss durchaus einmal wahrnehmen, dass für sein Denken die Seitenhalbierende eines Dreiecks verschieden sein kann von der Flächenhalbierenden, wenn sie auch logisch gleich sind. Dann wird auch das Herumreiten auf so manchem fragwürdigen Lieblingsbegriff des Schulunterrichtes wie etwa Grundwert und Prozentwert, Grundseite des Dreiecks, Erweiterungszahl und Kürzungszahl, Plusformel und Minusformel und Plusminusformel (binomische Formeln) usw. zugunsten der Bildung tragfähiger Vorstellungen zurücktreten. Geometrieunterricht ist schon in den Schulbüchern streckenweise das reine Vokabeltraining. Die Definitionswut tobt sich dabei auf einer formalen Ebene aus, die dem Schüler signalisiert, dass inhaltlich nicht viel zu holen ist. Beispiel:

> Die Verknüpfung von linearen Gleichungen durch das Bindewort *und* nennt man *lineares Gleichungssystem.*

Oder nehmen Sie folgende Passage aus einem Lehrbuch:

> Beachte: Ein Viereck mit drei rechten Winkeln an den Ecken ist ein **Rechteck.**
> Später in Klasse 7 werden wir begründen können, weshalb ein Viereck mit drei rechten Winkeln vier solche hat. Im Augenblick merken wir uns diesen Sachverhalt so:
> Ein Viereck mit vier rechten Winkeln an den Ecken ist ein Rechteck.

Es geht so weit, dass man selbst bei angestrengtem Denken nicht darauf kommt, was mit einem Satz wohl gemeint sein kann. Ein solcher Satz begegnete mir in einem Kasten mit Merkregeln zur Addition und Subtraktion und möglicher Probe. Mit dem Satz

> Der Minuend tritt stets auch als Summe auf.

konnte ich da keinerlei Sinn oder Zweck verbinden.

Unser Problem ist dabei nicht so sehr, dass solche höchst fragwürdigen Dinge geschehen, sondern uns interessiert vor allem, was für eine Haltung dahinter steht: Eine unreflektierte

Exaktheitsvorstellung lässt keinen Raum für einen fruchtbaren Weg des Schülers zur Mathematik.

Und vergessen wir nicht, dass selbst mögliche Qualitäten der Sprache wie Rhythmus etwas mit mathematischen Begriffen zu tun haben. Ein Drittel ist kardinal einfach ein Stück des Haufens, ordinal aber ist da Musik drin, jeder Dritte, das ist *1* 2 3, *1* 2 3, *1* 2 3. Wie schade, wenn man solche Gegebenheiten nicht nutzt zugunsten eines lebendigeren Mathematikunterrichtes mit seinen Möglichkeiten, den Schüler stärker und umfassender anzusprechen und so in die Mathematik hinein zu nehmen. Solchen Weg mit einer Klasse zu gehen, ist einfacher als man glaubt: Man gestatte den Schülern, ihre verschiedenen Vorstellungen in den Unterricht einzubringen, etwa, indem sie selbst ***ihr Zahlenbuch*** schreiben dürfen [Köhler 1999].

Damit diese Hinweise auf die Sprache als Weitung unseres Blickes verstanden werden und nicht zu Übertreibungen zur anderen Seite Anlass geben, am Schluss ein Beispiel, dass die ganze Vielfalt des Problems verdeutlicht. Ich hatte einige Wochen einen japanischen Schüler in der Mittelstufe, mit dem ich keine gemeinsame Umgangssprache hatte. Doch genügten die Zahlzeichen, bildliche Darstellungen und algebraische Ausdrücke zur Verständigung, und der Schüler hat in der Zeit soviel gelernt wie die besseren Schüler der Klasse. Ein Hinweis darauf, was – ein Stück weit – auch möglich ist, und ein Hinweis darauf, was es mit Gadamers Aussage „Lernen ohne Erfahrung" noch auf sich hat.

(5) Eigenaktivität: Intensität statt „Effektivität"

Die Lehrerzimmerabwehr, wegen staatlich verordneter Rahmenbedingungen könne man keinen besseren Mathematikunterricht halten, wurde zumindest in Baden-Württemberg durch eine von vielen nicht für möglich gehaltene Freigabe von Rahmenbedingungen längst überholt, und dieser Vorgang ist noch lange nicht an sein Ende gelangt. Aber inzwischen ist auch der (bequemen!) Notwendigkeit, Mathematik „für den Buchhalter" zu lehren von der Realität jede Legitimation entzogen worden. Den angesprochenen Anforderungen an einen zeitgemäßen Mathematikunterricht kann dieser sich nur bei Strafe seiner Sublimation entziehen. Das fordert jeden einzelnen Lehrer. In dessen Einstellung und Handlungsansatz entscheidet sich die zukünftige Rolle des Mathematikunterrichts in der Gesellschaft. Das baden-württembergische Projekt ***Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik (WUM)*** zeigt, dass viel mehr an Veränderung möglich ist, als die übliche kleingläubige skeptische Abwehr zuzugestehen bereit ist.

Eine notwendige zentrale Richtungsänderung besteht dabei darin, die vermeintliche Effektivität kurzfristig angelernter Einzelheiten und Verfahren und ihrer unmittelbar anschließenden „Herausgabe“ durch den Schülers in der darauf beschränkten Klassenarbeit in Frage zu stellen. Stattdessen rückt die ***Intensität*** der Beschäftigung des Schülers mit dem mathematischen Problem in den Mittelpunkt. Nicht die möglichst elegante Erklärung des Lehrers, sondern die ***Eigenaktivität*** des Schülers gewährt die bessere Chance zum Verständnis. ***Intensives Sich-Einlassen auf*** statt ***effektiver Abrichtung zu***, heißt die notwendige Richtungskorrektur. Damit wird sogleich die Rolle des Mathematikbuches neu definiert, indem es weit weniger, als bei den geradezu frühstücksgerecht angebotenen Einheiten erwartet, den Verlauf des Unterrichts bestimmen kann. Aber auch alle Arten von jetzt angebotenen Unterrichtsvorschlägen sind nicht zur *Benutzung* sondern zur *Anregung* geeignet. (Insofern kann es einen großen Vorteil bedeuten, wenn Unterrichtsvorschläge nicht mehr mit kopierbaren Arbeitsblättern aufwarten, sondern elektronisch und leicht veränderbar angeboten werden.)

Die Skepsis, man könne mit der Mehrheit der Schüler nicht zu wirklicher Eigentätigkeit gelangen, lässt sich zugegebenermaßen nur schwer widerlegen, wenn man es mit Schülern der oberen Klassen nach deren jahrelanger andersartiger Schulerfahrung versucht. Fängt man aber unten an, sieht das ganz anders aus. Wie erstaunt war da ein Lehrer, als in seinem 5. Schuljahr bei der Erstellung von Rechenpyramiden schließlich ein regelrechter Sog zum Abenteuer entstand: Die Schüler bauten „höllisch komplizierte“ Rechenpyramiden. Nebenbei bemerkt, einer der vielen Hinweise darauf, dass unsere Schüler oft zwar überfordert sind, den erwarteten Wissenskonsum in der angebotenen Weise zu bewältigen, letztlich ***geistig*** aber geradezu ***unterfordert*** sind. Und diese Beobachtung gilt nicht nur für das Gymnasium, sondern bis hin zur Hauptschule. Das Beispiel der Rechenpyramiden ist insofern typisch, als es zeigt, dass es oft sehr viel besser ist, wenn die Schüler selbst Vorschläge machen, selbst Aufgaben erstellen oder auch – statt der zur Zeit überall angebotenen *offenen* Aufgaben – selbst Aufgaben variieren, also „öffnen“. Wenn Schüler das Problem verändern, an Parametern zupfen, den Blick verschieben, von anderer Seite herangehen, nach Spezialfällen oder nach Verallgemeinerungen fragen u.v.m., dann sind sie sozusagen der Mathematik ausgeliefert, dann entsteht ein Sog, dem sie sich kaum entziehen können.

Und was macht dann der Lehrer? Als Vorbereitung auf den Unterricht mache er das Gleiche: Er spiele ein wenig mit den vertrauten Dingen, um ihnen neue Seiten abzugewinnen. Mit diesem erweiterten Horizont, nicht mit einer kleinschrittigen Unterrichtsvorbereitung, gehe er in die Klasse und stelle sich den Fragen seiner Schüler, statt sie mit seinen Fragen „zu stellen“. Dann kommt es zu einer Unterrichtsatmosphäre, in der die Schüler Fragwürdigkeiten des Unterrichtes sogar selbst anprangern. ***Intensität setzt Echtheit voraus*** statt vorgetäuschter Notwendigkeiten. Statt verlogener, vermeintlicher Anwendungsorientierung des Unterrichts ist echte Mathematik mit einer wirklichen Tendenz auf die Welt gefragt.

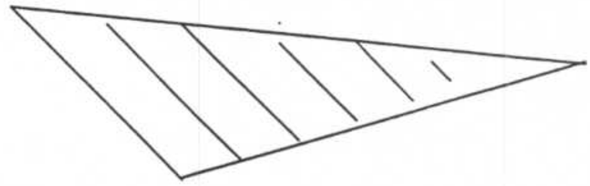
> Aufgabe: Familie Pfiffig will einen Schrank für das Wohnzimmer kaufen und sieht im Schaufenster von Möbel-Holzland einen Schrank von 2.50 m Breite, der ihr gut gefällt. Zu Hause messen sie die Breite der Stellwand nach, 2.20 m, so ein Pech! Um welchen Bruchteil von einem Meter ist der Schrank zu breit?
> Falls die Familie wirklich pfiffig ist, dann sieht sie die fehlende Länge in Zentimetern vor sich. Kein Mensch denkt hier in 3/10 von einem Meter. Eine künstlich eingekleidete Aufgabe, die trotz „Möbel-Holzland" keineswegs eine *Tendenz auf die Welt* (s.o.) in den Unterricht bringt, sondern dem Schüler, der den Betrug zumeist mindestens ahnt, nur zeigt, dass sein gesunder Menschenverstand im Mathematikunterricht nicht gefragt ist. Schüler, die selbst Aufgaben formulieren, sind für solche Fragen nach einer gewissen Zeit sensibilisiert.

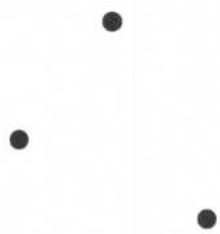
Das Problem ist die Enge des Horizontes, unter dem der Unterricht gesehen wird. Die Schüler sind uns da zumeist überlegen, sie versteifen sich keineswegs auf nur einen Aspekt. Nach entsprechender Sozialisation durch fragwürdigen Unterricht gilt das allerdings nicht mehr.

> In einer Klasse sollen die Schüler selbst zu Wort kommen und sie formulieren ihre eigenen Aufgaben. Eine lautet:
>
> > Eine Kuh macht täglich 50mal: „Muh!" Der Bauer hat 150 Kühe. Wie oft hört er in 3 Wochen: „Muh!" ?
>
> Da sind wir nicht weit gekommen. Der Schüler hat eine typisch verlogen eingekleidete Aufgabe formuliert, eben wie er es jahrelang gesehen hatte. Denn hier wird keineswegs eine Lebenssituation mit Hilfe der Mathematik durchschaubarer und ihr Problem lösbar(er) gemacht, sondern hier wird die Kuh dazu missbraucht, eine Standardaufgabe zur Proportionalität rechnen zu lassen. Statt frische Luft in die Schule zu holen, wird der Mief des Klassenzimmers in die ländliche Idylle geblasen. Da ist zunächst noch die Lehrperson gefragt. Im vorliegenden Fall präsentierte sie diese Aufgabe sogar als positives Beispiel für eine Eigenleistung. Letztlich handelt es sich aber um eine „Kapitänsaufgabe", wenn auch nicht der üblichen Art von fehlenden Angaben, denn die nahegelegte Berechnung ist purer Unsinn.

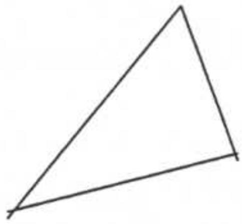
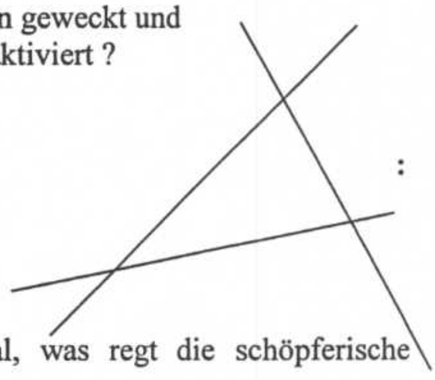
Das Beispiel zeigt uns, dass es nicht genügt, einen Aspekt des Unterrichtes zu verändern. Es ist nötig, das Ganze im Auge zu behalten. Den ***Blick aufs Ganze*** zu haben, ist die zentrale Aufgabe des Lehrers, der nicht mehr als Abspuhleinrichtung für einen didaktischen Entwurf agiert. Wenn der Unterricht weniger eindimensional abläuft, erzeugt er erst jenen Sog, der den Schüler weit stärker zur Mathematik zieht als es Druck (etwa durch die Notengebung) je vermöchte. ***Mehrdimensional***, das heißt zum Beispiel, den kardinalen und den ordinalen Zahlenaspekt im Auge haben, die Parallelität zwischen Aussagen über Parabeln und solchen über quadratische Gleichungen von vornherein in den Unterricht hineinlassen, das heißt, Phänomene und Begriffe in ihren möglichen Variationen zu sehen, heißt, die modulare Arbeitsweise des menschlichen Gehirns zu nutzen, statt sie veröden zu lassen.

Beispiel: Was ist ein Dreieck?
Ist ein Dreieck eine Fläche? Oder ist es eine Drei-Punkte-Konstellation?

Woran denken Sie hier  ,

und in welche Richtung gehen Ihre Gedanken hier  ?

Werden nicht jedes Mal ganz andere Assoziationen geweckt und andere bildliche oder gedankliche Verbindungen aktiviert ?

Oder vergleichen wir  und  :

Worin liegt ein größeres Veränderungspotential, was regt die schöpferische Phantasie mehr an ?

→ Welcher mögliche Beziehungsreichtum schon bei einer so simplen Frage deutlich wird, und dabei haben wir an so etwas wie Zahlentripel noch gar nicht gedacht!

Und die Mehrdimensionalität ist besonders wichtig bei der alten Streitfrage, wieviel geübt werden müsse, damit „es sitzt". Man verliert unglaublich viele Möglichkeiten, wenn man das Üben nicht produktiv versteht und es nicht in immer neuen Kontexten tut, die gleich noch anderes zu erleben, zu erfahren gestatten. (Was auch erneut intrinsische Motivation mobilisiert.) Die Stärke des Menschen liegt in der „Parallelverarbeitung", schon von daher bedeutet es einen unverzeihlichen Raub an bester jugendlicher Lebenszeit, wenn wir Schüler mit stumpfsinnigen Übungen beschäftigen. Aber wir können noch mehr von den Hirnforschern lernen. Der Mensch ist keine Information verarbeitende Maschine, sondern eine Sinn suchende Person. Auch das können wir jeden Tag im Unterricht erfahren, entweder negativ über Schülerfehler, oder positiv, wenn wir den Schüler zu eigenem Tun freigeben.

> Ein Beispiel aus dem Bruchrechen: Nachdem man mit einer Klasse begonnen hat, einen lebendigen Weg zu den Brüchen zu gehen, bleibt es kaum aus, dass die Schüler von sich aus mit diesen Brüchen zu rechnen verlangen. Wie könnte man sie wohl addieren? Die Schüler probieren. Mehr als die Hälfte der Schüler macht die Erfahrung, dass ihr erster Versuch, nämlich die Addition von Zählern und Nennern, nicht zum Ziel führt. Aber dieser Versuch, auf die Menge der aus den natürlichen Zahlen gebildeten Brüche die Addition der natürlichen Zahlen einfach zu übertragen, ist ja bestes mathematisches Vorgehen. Was macht denn ein Mathematiker in einem analogen Fall, wenn nicht, zunächst zu versuchen, ob man die bekannte Struktur auf den erweiterten Bereich übertragen kann. Die Schüler haben aus ihrem Scheitern etwas gelernt, haben ein Stück mehr verstanden, was Brüche sind. [Köhler 1994] Man kann solche Erfahrungen verhindern, indem man ihnen sagt, wie man addiert, indem man es ihnen mit einem geeigneten didaktischen Modell bei-bringt. Aber die Folgen beschreibt Padberg, wenn er feststellt, dass später der häufigste Schülerfehler ist, Zähler und Nenner zu addieren [Padberg S.91f]. Die Rache der Mathematik an ihrer unsachlichen *Vermittlung* (s.o.): In der Not, nachdem das Eingelernte vergessen ist, greift der Schüler zu einer genuin mathematischen Vorgehensweise, leider dann ohne wirkliche Auseinandersetzung mit dem Problem.

Das Beispiel führt uns zu einem wesentlichen Punkt. Eine intensive Auseinandersetzung beginnt mit der ***eigenen Frage***. Es ist eine alte pädagogische Weisheit, dass es viel wichtiger ist, eigene Fragen zu stellen, als Antworten auf vermeintlich gestellte Fragen zu suchen oder gar angeboten zu bekommen. Dass diese Weisheit alt und überall leicht nachlesbar ist, heißt nicht, dass sie die Szene beherrschte. Wir sehen es bis in didaktische Zeitschriften hinein:

> Da beginnt das Heft einer Zeitschrift für den Mathematikunterricht auf der ersten Seite zwar mit einem Artikel „fragen !“, der anhebt: „Antworten können geradezu produziert werden. Und je stärker Unterricht auf Ihre Produktion ausgerichtet ist, desto mehr entschwindet aus dem Bewusstsein, dass sich das Wesentliche in der Fragestellung ereignet.“ Doch danach folgt ein Artikel „Ein kindgemäßes Verfahren zum Erstellen perspektivischer Bilder von Würfelbauten“, in dem weder abgewartet wird, bis sich dem Kind die Frage nach solchen Bildern stellt, noch überhaupt ein Weg des Kindes zu solchen Bildern gesucht wird. Da es in dem entsprechenden Alter noch nicht möglich sei, „von einem realen Würfelgebäude ein perspektivisches Bild zu zeichnen“, wird als „kindgemäß“ verkauft, dem Kind ein Raster an die Hand zu geben, in dem ohne sein Bedürfnis und ohne sein Verständnis perspektivische Bilder nach Anleitung produziert werden können. [Mathematik in der Schule] Es ginge auch anders. Man könnte die Schüler einen ***Weg***

zur Notwendigkeit und Möglichkeit solcher Darstellungen gehen lassen [Köhler 1999].

Wir brauchen eigentlich keine konstruktivistischen Theorien, um die schlichte Wahrheit in unseren Unterricht hineinzunehmen, dass die eigene geistige Aktivität der Weg zum Lernen ist. Wenn Schüler heute zu solcher Aktivität beispielsweise bei einem Lehrervortrag nicht mehr gelangen, dann muss man eben andere Unterrichtsformen wählen. Wir brauchen vielleicht die Hinweise konstruktivistischer Theorien und die Hinweise der Kognitionswissenschaften, um endlich den festsitzenden Behaviorismus zu überwinden. (Etwa zuzugestehen, dass die behavioristische Vergessenskurve, die beim Lernen *sinnloser* Silben erhoben wurde, nicht allzu aussagekräftig für einen Mathematikunterricht ist, dem es um Verstehen geht, und der die Sinnsuche des Schülers ernst nimmt.)

Intensität der Beschäftigung mit Mathematik gelingt nicht durch vorbereitet kleinschrittige Vermittlung (s.o.). Sie ist nur über das Risiko der Freigabe des Schülers zu eigener Aktivität zu erreichen. Adler steigen keine Stufen. Lassen wir zum Schluss noch einmal den die Alpen erlebenden Wissenschaftler vom Anfang zu Worte kommen, hier über einen Abstieg bei Nacht in fremdem Gelände (man beachte das konstruktivistisch interpretierbare *entwerfen*):

> Man muss Felsstrukturen nicht unbedingt sehen, kann sie sich auch *entwerfen*. Ich balanciere über Erfahrungsmodelle aus der Summe aller vergangenen Felstreterei, und sie bewähren sich prima. (L.K. 25 J.)

Wenn unsere Schüler später über „Erfahrungsmodelle aus der Summe ihrer Unterrichtserfahrung balancieren" und diese sich bewähren sollten, dann hätten wir professionell gehandelt.

Literatur

Ulrich **Beck**: Schöne neue Arbeitswelt. Frankfurt (Campus) 1999

Jean-Pierre **Bourguignon**: A Basis for a New Relationship Between Mathematics and Society. In: B. Engquist / W. Schmid (Ed.): Mathematics unlimited - 2001 and beyond. Berlin, Heidelberg (Springer) 2001

Karl-Heinz **Brodbeck**: Entscheidung zur Kreativität: Darmstadt (Wiss. Buchgesellsch.) 1995

Philip **Davis**/Reuben **Hersh**: Descartes' Traum. Frankfurt am Main (Fischer Taschenbuch) 1990, S. 391

Hans Magnus **Enzensberger**: Zugbrücke außer Betrieb. Natick (Peters) 1999

Viviane **Forrester**: Der Terror der Ökonomie, Wien (Zsolnay) 1997

Hans **Freudenthal**: Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht. München, Wien (Oldenbourg) 1978

Hans-Dieter **Gerster**: Probleme und Fehler bei den schriftlichen Rechenverfahren. Erscheint 2001 in einem Sammelband bei Beltz. (Fritz-Stratmann, Ricken, Schmidt (Hg.): Schwierigkeiten beim Rechnenlernen - Schwierigkeiten des Kindes oder sozialer Systeme? [Arbeitstitel])

Marianne **Gronemeyer**: Das Leben als letzte Gelegenheit. Darmstadt (Wissenschaftliche Buchgesellschaft) 1993

Marianne **Gronemeyer**: Lernen mit beschränkter Haftung, Darmstadt (Wissenschaftliche Buchgesellschaft) 1997

Marian **Heitger**: Beiträge zu einer Pädagogik des Dialogs. Wien (Österr. Bundesverlag) 1983

Info 3: In Info 3, Nr. 3, März 2001, wird berichtet, dass Adams (Universität Michigan), Korycansky (Universität Santa Cruz) und Laughlin (NASA) eine Studie zu dem Plan vorgelegt haben, die Umlaufbahn der Erde um die Sonne durch Umleitung kleiner Asteroiden in die Nähe der Erde zu ändern.

Hartmut **Köhler**: Bildung und Mathematik in der gefährdeten Welt. Buxheim (Polygon) 1993

Hartmut **Köhler**: Situationen beim Bruchrechnen im 6.Schuljahr Gymnasium. In: mathematik lehren, Heft 64, Juni 1994

Hartmut **Köhler**: Von der Angst vor fragwürdigen Zensuren zur Freude an sachlicher Arbeit. In: Mathematik in der Schule, 33.Jg., Heft 11 / 1995

Hartmut **Köhler** (Hg.): Mathematikunterricht und demokratische Erziehung. Stuttgart (Landesinstitut für Erziehung und Unterricht, M 42) 1998

Hartmut **Köhler** (Hg.): Mathematik erleben. Von Kollegen für Kollegen: Ansätze zu einer anderen Unterrichtskultur. Leipzig (Klett) 1999

Rainer **Loska**: Lehren ohne Belehrung. Leonard Nelsons neosokratische Methode der Geschäftsführung. Bad Heilbronn (Klinkhardt) 1995

Maier/Schweiger/Reichel (Hg.): Mathematik und Sprache. Wien (ÖBV/HPT) 1999

Mathematik in der Schule, 37. Jg., Heft 4, 1999

Bengt **Molander**: Knowledge - Between Theory and Practice. In: Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics. Report from symposium held in Gilleleje, Denmark, 1992. Roskilde University 1993

Alain **Minc**: Das neue Mittelalter. Hamburg (Hoffmann u. Campe) 1995

Gunhild **Nissen**: Bericht über das dänische Projekt „Mathematikunterricht und Demokratie". In: Journal für Mathematikdidaktik (JMD) Jg. 14 (1993), Heft 2, S.102

Friedhelm **Padberg**: Didaktik der Bruchrechnung. Mannheim (BI Wissenschaftsverlag) 1989

John R. **Saul**: Der Markt frißt seine Kinder. Wider die Ökonomisierung der Gesellschaft. Frankfurt / New York (Campus) ^{2}1998

August **Schmid**: Wie sage ich es dem Kinde? Zur Sprechweise im Mathematikunterricht. In: Lehren und Lernen, 27. Jg., Heft 1, Januar 2001

Elisabeth **Thoma**: Auf dem Weg zu einer demokratischen Unterrichtskultur. In: Hartmut Köhler (Hg.): Mathematikunterricht und demokratische Erziehung. Stuttgart (Landesinstitut für Erziehung und Unterricht, M 42) 1998

Bengt **Ulin**: Der Lösung auf der Spur. Stuttgart (Verlag Freies Geistesleben) 1987

Martin **Wagenschein**: Verstehen lehren. Weinheim (Beltz)^{6} 1977

Christiane **Weber**: Wie man mit Aufgaben umgehen kann. In: mathe-journal 1/01

Alexander I. **Wittenberg**: Bildung und Mathematik. Stuttgart (Klett) 1963

Alexander I. **Wittenberg**: Vom Denken in Begriffen. Basel (Birkhäuser) 1968

Erich Ch. **Wittmann**: Mathematikunterricht zwischen Skylla und Charybdis. In: Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg, Band XII, Heft 3, 1991

Erich Chr. **Wittmann**: Legen und Überlegen. In: Grundschulzeitschrift, 8. Jg., Heft 72, März 1994

Lothar **Wurz**: Eine Beobachtung im Mathematikunterricht einer 5. Klasse - Einige Konsequenzen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2001. Hildesheim (Franzbecker) 2001

Michael **Zwick**: Unlust an der Technik. In: Lehren und Lernen, 27. Jg., Heft 1, Januar 2001